

УДК 62.501

A. M. Молчанов

Пущино, СССР

МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Свойства пограничного слоя или турбулентности (а также других важных явлений математического естествознания) тесно связаны с математическими особенностями систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = a(x, t) \quad (1)$$

с малым параметром ε при производных.

Основные аналитические трудности появляются уже в линейных системах

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t) x. \quad (2)$$

Решения этих систем — высокочастотные колебания, модулированные по частоте и амплитуде. Даже в простейшем случае «комплексной экспоненты»,

$$x(t) = x_0 \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right), \quad (3)$$

решение однородного комплексного уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = \lambda(t) x \quad (4)$$

имеет существенную особенность при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Другой важный частный случай дает неоднородное комплексное уравнение

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \lambda(t) y + B(t), \quad (5)$$

имеющее единственное частное решение, «выдерживающее» предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$y(t) = -\frac{B(t)}{\lambda(t)} + O(\varepsilon). \quad (6)$$

Такое решение разумно назвать «неколеблющимся». Оно может быть найдено двумя квадратурами, хорошо известным методом «вариации произвольной постоянной». Это решение существует только на участке, где сохраняет знак действительная часть $\lambda(t)$:

$$\operatorname{Re} \lambda(t) > 0 \text{ [или } \operatorname{Re} \lambda(t) < 0]. \quad (7)$$

Соответствующее решение однородного уравнения вырождается в тривиальное

$$x(t) \equiv 0. \quad (8)$$

Все остальные решения «не выдерживают» предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$.

Основной результат доклада состоит в разделении «колеблющихся» и «неколеблющихся» множителей общего решения линейной системы.

Более точно будет указан метод построения «неколеблющейся» замены переменных, приводящей общую систему (2) к диагональному виду. (Иногда, впрочем, удобнее приводить ее к треугольному виду).

Алгоритм этой редукции (легко доводимый до точного доказательства) состоит из следующих этапов.

I. Матричное уравнение. Вместо векторного уравнения (2) пишем матричное уравнение

$$\varepsilon \frac{ds}{dt} = A(t) S \quad (9)$$

для фундаментальной матрицы $S(t, \varepsilon)$ линейной системы (2) обыкновенных дифференциальных уравнений.

II. Асимптотическая диагональность. Выделяем из $S(t, \varepsilon)$ матричный (левый!) множитель $U(t)$ не зависящий от ε ,

$$S(t, \varepsilon) = U(t) R(t, \varepsilon), \quad (10)$$

приводящий систему к виду

$$\varepsilon \frac{dR}{dt} = B(t, \varepsilon) R. \quad (11)$$

Новая матрица B выражается через старую A и матрицу замены переменных U по формуле

$$B(t, \varepsilon) = U^{-1}AU - \varepsilon U^{-1} \frac{dU}{dt}. \quad (12)$$

Надлежащим выбором U (как это следует из общих теорем линейной алгебры) матрицу B можно сделать диагональной (в главном члене!)

$$U^{-1}AU = \Lambda. \quad (13)$$

Иногда удобно считать Λ треугольной. В этом случае матрицу U можно найти среди унитарных (ортогональная замена переменных). В любом случае собственные числа матрицы Λ можно расположить в порядке возрастания их действительных частей

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n. \quad (14)$$

Такое построение осуществимо на интервале (t_0, t_1) , на котором все собственные числа матрицы A однократны. Концы интервала определяются слиянием пары корней. Для уравнения Шредингера — это хорошо известные классические «точки поворота».

III. Матричное уравнение Риккати. Следующий шаг состоит в том, чтобы приближенно диагональную матрицу B сделать точно треугольной. Выделим из R левый множитель P :

$$R = PQ. \quad (15)$$

и подставив в (11) умножим слева на P^{-1} и справа на -1 .

$$\varepsilon P^{-1} \frac{dP}{dt} + \varepsilon \frac{dQ}{dt} Q^{-1} = P^{-1}BP. \quad (16)$$

Решающее соображение состоит в расщеплении матриц P и Q на основе их различной треугольности. Положим

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ P_{21} & 1 & 0 & \dots \\ P_{31} & P_{32} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots \\ 0 & Q_{22} & Q_{23} & \dots \\ 0 & 0 & Q_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Теперь легко видеть, что первое слагаемое в (16) имеет ненулевые элементы только ниже диагонали, а второе только по диагонали и выше ее. Это соображение легко формализовать вводя **проекционный оператор T** в пространстве матриц, зануляющий все элементы на диагонали и выше ее и оставляющий неизменными элементы ниже диагонали. Тогда из (16) вытекает:

$$\varepsilon P^{-1} \frac{dP}{dt} = T(P^{-1}BP). \quad (18)$$

Это и есть матричное уравнение Риккати, ибо в частном случае уравнения Штурма — Лиувилля это общее уравнение сводится к обычному скалярному уравнению Риккати. В работе А. М. Молчанова * построен итерационный быстро сходящийся процесс, сводящий решение уравнения (18) к серии квадратур точно такого типа, которым находится «неколеблющееся» решение уравнения (5). Поэтому уравнение (18) имеет единственное «неколеблющееся» решение.

IV. Полное «расщепление». Остается проинтегрировать точно треугольную систему для Q :

$$\varepsilon \frac{dQ}{dt} = CQ. \quad (19)$$

* Молчанов А. М. Равномерная асимптотика линейных систем.— Докл. АН СССР, 1967, 173, № 3, с. 519—522.

Полагая $Q = \Lambda V$, имеем уравнение

$$\varepsilon \Lambda V + \varepsilon \Lambda \frac{dV}{dt} = C \Lambda V, \quad (20)$$

откуда получаем

$$\varepsilon \frac{d\lambda}{dt} = \lambda \Lambda, \quad (21)$$

и

$$\varepsilon \frac{dW}{dt} = (C - \lambda) V. \quad (22)$$

Собирая все вместе, получаем окончательный результат

$$S(t, \varepsilon) = W(t, \varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int \lambda dt \right) V(t, \varepsilon). \quad (23)$$

Итак фундаментальная матрица S есть диагональная матрица Λ , умноженная справа и слева на «неколеблющиеся» матрицы V и W .

Полученный результат допускает обобщение на нелинейные системы.